

DOI: 10.16285/j.rsm.2019.1230

一种旋转塑性势面模型及非关联塑性流动法则

徐日庆^{1,2}, 蒋佳琪^{1,2}, 冯苏阳^{1,2}, 鞠露莹^{1,2}

(1. 浙江大学 滨海和城市岩土工程研究中心, 浙江 杭州 310058; 2. 浙江省城市地下空间开发工程技术中心, 浙江 杭州 310058)

摘 要: 为了较好地描述软土塑性应变发展规律, 提出了一种改进的塑性流动模型。该模型采用了与屈服函数形式相同, 但具有一定倾角 γ 的塑性势函数。土体在变形过程中, 塑性流动方向会依赖于塑性势面的旋转而变化, 直至达到破坏状态。通过对常规三轴试验结果的分析可以发现: 在剪切过程中, 塑性势面旋转角的初值 γ_0 与终值 γ_d 较为稳定, 不受围压变化影响。在此试验观察基础上, 引入了归一化的旋转角参数 γ' 以及描述土体应力状态的参数 ξ , 在采用蛋形势函数的情况下二者具有良好的分段线性关系。利用该关系, 建立了改进的塑性流动法则, 只需要 2 个额外的模型参数。对所提出的塑性流动模型进行了验证, 计算结果表明该模型能较好地反映塑性应变的变化趋势。

关 键 词: 非关联塑性流动法则; 旋转塑性势面; 蛋形函数; 应力状态

中图分类号: TU 313

文献标识码: A

文章编号: 1000-7598(2020)05-1474-09

A rotational plastic potential model and non-associated plastic flow rule

XU Ri-qing^{1,2}, JIANG Jia-qi^{1,2}, FENG Su-yang^{1,2}, JU Lu-ying^{1,2}

(1. Research Center of Coastal and Urban Geotechnical Engineering, Zhejiang University, Hangzhou, Zhejiang 310058, China;

2. Engineering Research Center of Urban Underground Development of Zhejiang Province, Hangzhou, Zhejiang 310058, China)

Abstract: In order to accurately describe the evolution of plastic strain for soft soil, an improved plastic potential theory is proposed, in which a plastic potential surface with an inclination angle γ is employed. In addition, the plastic potential function shares the same form as the yield function. During deformation, the plastic flow direction varies following the rotation of the plastic potential surface until the limit state is reached. By analyzing the results of conventional triaxial tests, it can be found that during the shearing process, the initial and final values of the rotation angle of the plastic potential surface γ_0 and γ_d , are basically stable and independent on the confining pressure. Considering such observations, a normalized rotation angle γ' and a state parameter ξ describing the stress state of the soil are introduced, in the case that the egg-shaped function is used as plastic potential function. A piecewise linear relationship can be obtained. Then an improved plastic flow rule is established, only two additional parameters are required. Finally, the proposed plastic flow model is verified, and the results show that the trend of plastic strain can be reflected well in this model.

Keywords: non-associated plastic flow rule; rotational plastic potential surface; egg-shaped function; stress state

1 引 言

经典的弹塑性理论中, 土体的变形计算需要明确三部分内容: 屈服函数、塑性流动法则以及硬化(或软化)规律^[1]。所谓塑性流动法则, 简单来讲, 可以理解为如何确定各塑性应变分量之间的比例关系, 该比例关系一般采用增量形式表示。

传统塑性流动法则大致可以分为关联与非关联

流动法则两大类, 前者采用与屈服函数相同的函数作为塑性势函数。这种做法往往先确定的是塑性势函数, 比如说剑桥模型中剪胀方程本质上就是一种塑性流动法则。黄文熙^[2]、郭瑞平等^[3]也从试验数据出发, 先确定塑性势面, 再确定屈服面, 继而建立清华模型。尽管这种处理方式略显粗糙, 但在保证计算精度的前提下, 可以有效降低模型复杂程度。因此, 在实际弹塑性模拟中相关联流动法则有着广

收稿日期: 2019-07-15

修回日期: 2019-09-16

基金项目: 国家自然科学基金(No. 41672264); 浙江省重点研发计划(No. 2019C03103); 中央高校基本科研业务费专项资金(No. 2019QNA4041)。This work was supported by the National Natural Science Foundation of China (41672264), the Key Research and Development Program of Zhejiang Province (2019C03103) and the Special Funds for Fundamental Research Business Expenses of Central Colleges and Universities (2019QNA4041).

第一作者简介: 徐日庆, 男, 1962 年生, 博士, 教授, 博士生导师, 主要从事土的工程性质和本构模型等方面的教学与研究工作。E-mail: xurq@zju.edu.cn

通讯作者: 蒋佳琪, 男, 1990 年生, 博士研究生, 主要从事软土本构模拟研究工作。E-mail: jiangjiaqi@zju.edu.cn

泛的应用^[4-9]。

非关联流动准则则是采用与屈服函数不相同的塑性势函数，这样处理最大的优势就在于能够兼顾土体屈服与塑性变形两者特点，更加准确地描述土体弹塑性变形性质，因而受到许多学者青睐^[10-16]。但棘手的地方在于如何确定塑性势函数，比较简单的做法就是借助于屈服函数，选用不同的模型参数以符合塑性变形特征，该种做法对于剑桥模型及其衍生的相关模型较为常见^[17-21]。另一种尝试则是直接从试验数据出发，拟合得到塑性势函数^[22-23]。此外，还有一些研究通过理论方法，例如能量耗散原理，直接推导得到塑性势函数^[24-25]。

蛋形屈服准则被提出已有20余年，该准则所具备的一些优点已经被详细地讨论过^[26-27]。然而可惜的是，关于该准则在弹塑性本构模型中的应用几乎鲜有文献。究其原因，除了屈服函数本身形式有些复杂之外，未有相匹配的塑性流动法则可能也是因素之一。当然，可以直接采用屈服函数本身作为塑性势函数，也就是相关联的流动法则，但这样处理在剪切刚开始阶段，由于屈服函数的性质必然导致塑性流动方向是沿着静水压力轴方向，这一结果与大部分的试验观察是不吻合的。因此，有必要提出一种适用于蛋形函数的塑性流动法则。

本文在常规三轴试验的基础上，对土体的弹塑性变形进行计算与分析。在保留蛋形函数基本形式的前提下提出了一种适用于蛋形屈服准则的非关联流动法则。引入土体状态参数等概念，对该流动法则的基本原理以及实施步骤进行了详细的阐述，并对该模型的有效性进行验证。

2 常规三轴试验及塑性变形分析

2.1 试验材料、方法及主要结果

本次试验用土为台州淤泥质软土，其基本物理性质如表1所示。

表1 土体基本物理力学性质

Table 1 Physical and mechanical properties of soil

重度 ($\text{kN} \cdot \text{m}^{-3}$)	含水率 w /%	相对密度 G_s	液限 w_L /%	塑限 w_p /%	塑性指数 I_p	破坏应 力比 M
18.6	42.7	2.73	45.6	24.7	20.9	1.33

试验采用重塑土样，先将土样在105℃下烘干、碾碎并过0.5 mm筛备用。试样高度为80.0 mm，直径为39.1 mm，采用击样法制样，分4层振捣击实。试样的初始孔隙比控制在 $e_0 = 1.14$ 。随后将制备好的试样放在真空饱和缸中进行抽气饱和。

三轴试验在浙江大学 GDS 标准应力路径三轴仪上进行，本次试验内容为固结排水试验，共进行围压分别为25、50、100、200、400 kPa等5组常规三轴试验。试验时首先对试样进行反压饱和，反压为300 kPa，饱和完成后进行试样孔隙水压力系数（ B 值）检测，当 B 稳定在0.98以上时认为试样饱和，方可进行固结。剪切采用排水剪切模式，由偏应力加载控制，速率为0.08 kPa/min。

图1、2分别给出了5组试验的偏应力-轴向应变、体积应变-轴向应变关系曲线，可以看到试样的变形过程呈现出应变硬化以及剪缩特性。

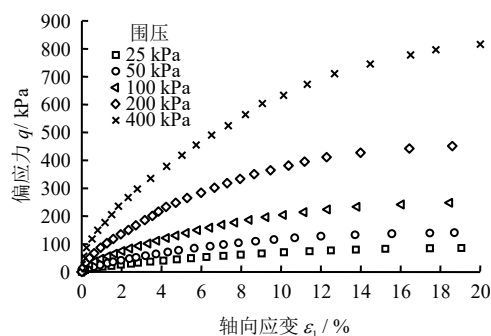


图1 固结排水三轴试验应力-应变关系曲线
Fig.1 Stress-strain curves of CD test

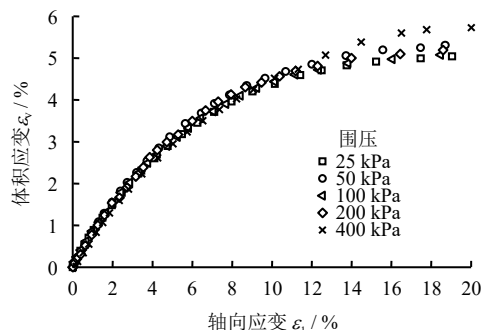


图2 固结排水三轴试验体应变-轴向应变关系曲线
Fig.2 Relationships between volumetric strain and axial strain in CD test

2.2 弹塑性变形计算

在弹塑性理论框架中土体总应变 ϵ_{ij} 是由弹性部分 ϵ_{ij}^e 与塑性部分 ϵ_{ij}^p 两者所构成，其增量表达式可写作如下形式：

$$d\epsilon_{ij} = d\epsilon_{ij}^e + d\epsilon_{ij}^p \quad (1)$$

其弹性部分的变形满足广义 Hook 定律，可以通过下式计算确定：

$$\begin{bmatrix} dp \\ dq \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} K & 0 \\ 0 & 3G \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d\epsilon_v^e \\ d\epsilon_s^e \end{bmatrix} \quad (2)$$

式中： p 为平均主应力； ϵ_v^e 为弹性体积应变； ϵ_s^e 为

弹性剪切应变； K 、 G 分别为土体的弹性体变模量和弹性剪切模量。弹性体变模量 K 通常可以由等向压缩试验回弹再加载段确定，其一般表达式为^[3]

$$K = K_0 p \quad (3)$$

式中： K_0 为试验常数。

弹性剪切模量 G 则可由常规三轴试验卸载再加载段确定^[3, 6, 24]：

$$G = G_0 p_a \left(\frac{\sigma_3}{p_a} \right)^m \quad (4)$$

式中： p_a 表示一个标准大气压，约为 101 kPa； G_0 、 m 均为试验常数； σ_3 为围压；该模型共 3 个弹性常数： K_0 、 G_0 、 m 。对于本次试验，弹性参数分别取值为： $K_0 = 77.6$ ， $G_0 = 75.728$ ， $m = 0.934$ 。

塑性应变则由总应变减去相应的弹性应变得到：

$$\begin{aligned} \varepsilon_v^p &= \varepsilon_v - \sum (\Delta p / K) \\ \varepsilon_s^p &= \varepsilon_s - \sum (\Delta q / 3G) \end{aligned} \quad (5)$$

进一步可以求出各塑性应变增量 $d\varepsilon_v^p$ 以及 $d\varepsilon_s^p$ 。

2.3 塑性流动方向分析

塑性理论中规定，塑性应变增量方向是由应力空间中的塑性势面决定，某一应力状态点的塑性应变增量方向垂直于通过该应力点的塑性势面，即塑性势面外法线方向，这就是所谓的正交流动法则^[1]：

$$d\varepsilon_{ij}^p = d\lambda \frac{\partial g}{\partial \sigma_{ij}} \quad (6)$$

式中： $d\lambda$ 为塑性因子； g 为塑性势函数； σ_{ij} 为应力张量。

塑性势函数的概念最早由 Poorooshab 等基于试验数据应用于土体塑性变形分析计算中，同时 Poorooshab 等^[28]也进一步指出加载过程中某应力点的塑性流动方向仅与该点的应力状态有关，与到达该点的应力路径无关。该论点后来又由 Lade 等的试验结果^[29]得到进一步验证。如今绝大多数的土体本构模型也都遵循着这一原则。更加明确地说，大部分经典的弹塑性本构理论（以剑桥模型为代表），均认为土体的塑性流动方向完全由应力比 η （ $\eta = q/p$ ）所唯一确定，于是就会得到：

$$\frac{d\varepsilon_v^p}{d\varepsilon_s^p} = f(\eta) \quad (7)$$

为了便于讨论，将式（7）中等号左侧部分记为 ν^p ，即等效塑性泊松比。

图 3 给出了此次试验中前 4 组围压条件下土体的塑性流动方向，考察 4 组试验应力路径与 4 条等应力比应力路径（ η 分别为 0、0.4、0.8、1.2）交点处应力点的塑性流动方向。可以看到，随着围压的增大，同一 η 应力路径上应力点的 ν^p 似乎有减小的趋势，通过进一步计算可以发现，在同一条等比应力路径上各应力点的塑性流动方向尽管不完全一致，但偏差基本保持在 10° 以内，考虑到参数估算中可能存在的一些误差，基本可以认为式（7）对于本次试验土样是适用的。

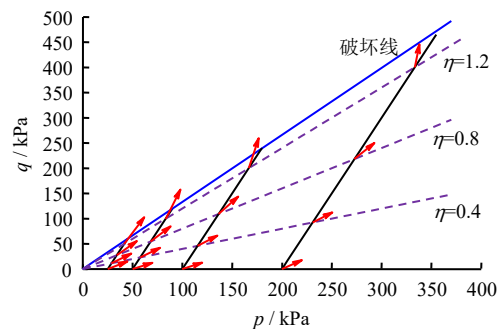


图 3 塑性流动方向示意图
Fig.3 Illustration of plastic flow direction

3 旋转的塑性势面原理

诚如前文所提及，无论是关联或是非关联的流动法则各自都有一定的优劣势。针对蛋形屈服准则，若采用关联流动法则，无法准确地描述土体塑性变形。为此提出一种改进的塑性流动法则以更好地反映土体的塑性变形趋势，该流动法则采用与屈服面相同的蛋形函数形式。笔者先前所建议蛋形屈服准则的主要特征，这里将先做一个简要的说明。

3.1 蛋形屈服函数

蛋形屈服函数最早由任放等^[26]所提出，其表达式可以写作如下：

$$\left(\frac{p-H}{aH} \right)^2 + \left(\frac{1-\alpha^2}{1+\alpha \frac{p-H}{aH}} \right)^2 \left(\frac{q}{bH} \right)^2 = 1 \quad (8)$$

式中： $q = \sqrt{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2} / \sqrt{2}$ ， $p = \sigma_{ii} / 3$ ； aH 、 bH 分别代表长、短轴半径， a 、 b 为材料常数，可由试验确定； α 为描述屈服面曲率的形状参数。 H 为硬化参数，随着 H 的增加，土体的屈服面不断向外扩张，以表征土体的运动硬化特征。

蛋形屈服函数最大的特点就是将经典屈服理论中（例如 Von Mises 准则、Drucker-Prager 准则以及

摩尔-库仑准则)的线性段屈服面与受静水压力而屈服的盖帽部分较好地统一在了一个函数框架内。如图4所示, 蛋形屈服函数在 p - q 平面内处处连续可导, 因而避免了由于在分段点处出现的导数不连续, 从而塑性流动方向无法确定的问题。

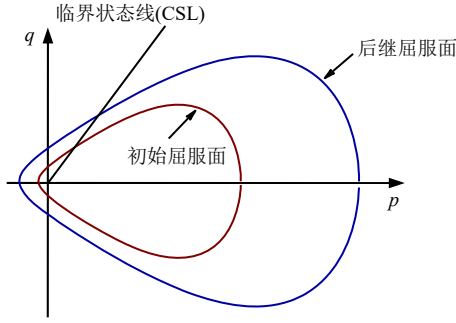


图4 蛋形屈服面
Fig.4 Egg-shaped yield surface

3.2 倾斜的蛋形塑性势面原理

首先为了便于分析, 后续推导将在极坐标下完成, 于是式(8)所表示的蛋形函数可以写成:

$$\left. \begin{aligned} p &= H(1 + a \cos \theta) \\ q &= \frac{bH \sin \theta}{1 - \alpha^2} (1 + \alpha \cos \theta) \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

式中: θ 为应力幅角。

类似地, 对应的塑性势函数 g 也采用形状相似的蛋形函数表示, 则未旋转时的塑性势函数可以写成:

$$\left. \begin{aligned} p &= H_p(1 + a \cos \theta) \\ q &= \frac{bH_p \sin \theta}{1 - \alpha^2} (1 + \alpha \cos \theta) \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

式中: H_p 为塑性势函数对应的硬化参数。

式(9)与式(10)中屈服面和塑性势面采用相同的模型参数 a 、 b 、 α , 可以由试验方法找出屈服点并加以拟合得到。两者区别在于塑性势函数的中心点并不一定与屈服面中心重合, 因此塑性势函数的硬化中心采用 H_p 表示, 与屈服函数硬化中心 H 相区分。

在 p - q 平面内将塑性势面顺时针绕中心 O' 旋转角度 γ , 如图5所示。图中实线1表示以 O 为中心的屈服函数, 虚线2代表以 O' 为中心未旋转的塑性势面, 实线3表示旋转后的塑性势面。

上述塑性势面旋转可通过如下坐标变换实现:

$$\begin{bmatrix} p' - H_p \\ q' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \gamma & \sin \gamma \\ -\sin \gamma & \cos \gamma \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p - H_p \\ q \end{bmatrix} \quad (11)$$

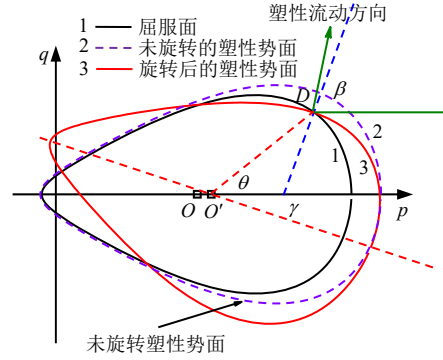


图5 倾斜的蛋形塑性势面
Fig.5 Inclined egg-shaped plastic potential surface

式中: p' 、 q' 分别表示旋转后平均主应力以及偏应力。

对于应力路径上的任意一应力点 D , 首先 D 点一定位于某一屈服面以及对应的塑性势面上, 即同时满足式(9)以及式(11)。此外, 塑性势面在 D 点处的外法线方向, 即塑性流动方向可以由试验结果所得到的等效塑性泊松比 ν_p^p 确定。

将式(10)代入式(11), 并微分可得

$$\nu_p^p = \frac{\sin \theta \sin \gamma + \left[\frac{b}{a(1 - \alpha^2)} \right] \cos \gamma (\cos \theta + \alpha \cos 2\theta)}{\sin \theta \cos \gamma - \left[\frac{b}{a(1 - \alpha^2)} \right] \sin \gamma (\cos \theta + \alpha \cos 2\theta)} \quad (12)$$

根据已知点 D 应力大小以及对应的等效塑性泊松比 ν_p^p 对方程(11)、(12)进行联立求解, 尽管方程形式上似乎比较复杂, 但采用数值方法进行求解并无任何困难, 本文中采用 MATLAB 对上述方程组数值求解, 于是就可以得到相应的 θ 、 H_p 、 γ 。

表2中给出了5组试验路径等效塑性泊松比 ν_p^p 与塑性势面旋转角 γ 之间的对应关系。可以发现, 对于不同围压条件塑性势面旋转角 γ 的初始值 γ_0 以及达到破坏时的终值 γ_d 变化不大, 分别稳定在 80° 和 -60° 左右, 也就说明应力路径对其影响几乎可以忽略, 从而可以近似认为 γ_0 与 γ_d 是一个模型常量。

另一个值得注意的地方就是旋转角 γ 由正到负的转变。当 γ 取负值时, 也就说明此时塑性势面的旋转方向为逆时针, 对于该现象可以做如下解释: 假设 $\gamma \geq 0$, 并且当土体破坏时有 $\gamma = 0$, 可想而知, 在这一条件下土体达到临界状态时塑性势面与屈服面完全重合。我们知道, 土体在临界状态的重要标志就是 $d\varepsilon_v^p = 0$, 在这种情况下临界状态线必然会经过塑性势面的顶点, 同时也就是屈服面的顶点。然

而从包括此次试验以及其他一些试验的结果表明, 临界状态线并不一定经过屈服面的顶点, 无论是经典剑桥模型中的椭圆形屈服面还是本文中的蛋形屈服面。从图 4 中蛋形屈服面示意图中可以定性地看到临界状态线与蛋形屈服面的交点应位于屈服面中心点的左侧, 这就导致了当土体破坏时塑性势面只有逆时针旋转才能保证 $d\varepsilon_v^p = 0$ 。同时可以看到, 临界状态线与屈服面交点的幅角 θ 大致也是稳定的, 这就决定了 γ_d 的值受应力路径影响较小。

表 2 旋转角 γ 的计算值
Table 2 Calculated values of rotation angle γ ($^\circ$)

$\sigma_3 = 25 \text{ kPa}$		$\sigma_3 = 50 \text{ kPa}$		$\sigma_3 = 100 \text{ kPa}$		$\sigma_3 = 200 \text{ kPa}$		$\sigma_3 = 400 \text{ kPa}$	
v^p	$\gamma / (^\circ)$	v^p	$\gamma / (^\circ)$	v^p	$\gamma / (^\circ)$	v^p	$\gamma / (^\circ)$	v^p	$\gamma / (^\circ)$
1.21	81.3	1.51	81.8	1.60	79.5	1.41	77.4	1.13	77.6
1.18	47.3	1.33	32.7	1.35	28.4	1.24	33.1	0.94	15.5
1.10	20.0	1.14	11.3	1.06	4.69	1.07	11.4	0.77	-20.0
0.99	-3.4	0.96	-19.4	0.83	-23.1	0.92	-13.9	0.62	-29.4
0.84	-24.8	0.73	-30.6	0.64	-31.2	0.70	-30.8	0.49	-34.7
0.66	-37.5	0.57	-39.0	0.47	-40.2	0.60	-40.0	0.39	-40.7
0.51	-45.6	0.44	-47.3	0.36	-49.2	0.45	-46.6	0.27	-44.3
0.38	-53.2	0.31	-51.3	0.24	-54.2	0.31	-52.0	0.22	-48.6
0.26	-58.5	0.19	-56.8	0.13	-56.4	0.14	-56.1	0.17	-55.4
0.15	-60.6	0.10	-59.1	0.09	-58.8	0.07	-58.6	0.10	-55.9
0.05	-65.3	0.02	-60.8	0.05	-60.8	0.04	-60.8	0.05	-57.5

4 塑性流动法则

4.1 旋转角 γ 的归一化表示

临界状态土力学理论中一个非常重要的观点就是无论土体先期的应力-应变如何演变, 只要当前的物理状态 (包括应力、应变以及孔隙比等) 一致, 那么就会表现出相似的性质。Yu^[30]曾经在研究土体本构理论时引入了一个状态参数, 用以描述土体状态与临界状态之间的差距。受该方法的启发, 考虑本次试验中塑性势面旋转角 γ 的变化规律是否可以由土体相应的状态参量进行表征。

由前面的分析可知, 旋转角 γ 的变化范围为 $\gamma_0 \sim \gamma_d$, 考虑到 γ_0 以及 γ_d 的稳定性, 这里引入一个新的归一化旋转角变量 γ' :

$$\gamma' = \frac{\gamma_0 - \gamma}{\gamma_0 - \gamma_d} \quad (13)$$

显然归一化参数 γ' 的变化范围为 $0 \sim 1$ 。同时根据式 (7), 考虑采用 η 作为描述土体状态的一个变量, 鉴于 γ' 是一个描述角度变化的参量, 这里我们建议采用如下的无量纲状态参量 ξ 来表示:

$$\xi = \frac{\arctan \eta}{\arctan M} \quad (14)$$

式中: M 为表 1 中土体破坏时的应力比。 ξ 的取值范围也为 $0 \sim 1$, 其物理意义表示为应力点 (p, q) 与坐标原点连线的方向角与临界状态线方向角之比。显然, 参数 ξ 也可以描述当前状态与临界状态之间的差距, 不是通过距离, 而是通过倾角实现的。

图 6 展示了 5 组试验数据中 γ' 与相应的 ξ 之间的关系。可以发现, 二者之间具有近似的线性依赖。

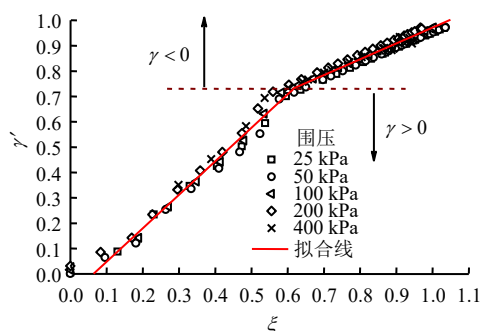


图 6 归一化旋转角 γ' 与状态参数 ξ 之间的关系
Fig.6 Relationships between the normalized rotation angle γ' and state parameter ξ

从图 6 中可以看到, ξ 与 γ' 之间的关系可以近似用分段函数表示。通过进一步分析可以发现, 该分段点大致位于旋转角 γ 由正变负的转折点附近, 相应的 $\gamma' = \gamma_0 / (\gamma_0 - \gamma_d)$ 。之所以会产生这样的转折, 是由于蛋形塑性势面曲率的不规则变化引起的。当 $\gamma > 0$ 时, 可以知道应力点在旋转后塑性势面上的位置相当于未旋转蛋形曲面的顶部区域, 这一区域曲率半径相对较小, 外法线方向角沿着塑性势面变化快, 于是随着应力的发展旋转角 γ 变化速率相对较快; 而当 $\gamma < 0$ 时, 应力点在旋转塑性势面上的位置相当于在未旋转蛋形曲面的右侧区域, 显然这一区域的曲率半径大, 从而旋转角 γ 变化速率相对较慢。这也说明, 采用不同形式的塑性势函数会对 γ' - ξ 关系产生一定影响, 但总体上是接近于线性关系的。

考虑到 γ' - ξ 关系曲线两个端点理论值 $(0,0)$ 、 $(1,1)$, γ' - ξ 关系式可以近似表示成:

$$\gamma' = \begin{cases} k_1 \xi, & \xi \leq \xi^* \\ k_2 (\xi - 1) + 1, & \xi > \xi^* \end{cases} \quad (15)$$

式中: k_1 、 k_2 均为试验拟合参数; ξ^* 为分段点处的无量纲应力状态参量值。

进一步考虑式 (15) 在分段点处的连续性, 则有

$$\xi^* = \frac{1 - k_2}{k_1 - k_2} \quad (16)$$

整个 γ' - ξ 关系式只有 2 个参数, 即 k_1 和 k_2 需要

确定。

4.2 γ_0 以及 γ_d 的确定

如前文所述,参量 γ_0 以及 γ_d 分别表示塑性势面旋转角 γ 的初始值和终值,可以根据初始等效塑性泊松比 ν_0^p 和破坏时的等效塑性泊松比 ν_d^p 通过方程 (11)、(12) 联立求解得出。当然求解时需要知道试验应力路径的初始以及破坏时的应力大小,这可以利用 M 值加以估算,无需其他参数。显然,破坏时的等效塑性泊松比 $\nu_d^p = 0$, 而初始等效塑性泊松比 ν_0^p 根据图 3 中的分析结果可以近似地设定:

$$\nu_0^p = M \quad (17)$$

据此,图 3 中的塑性流动方向与 ν_0^p 的方向均在 $\pm 5^\circ$ 范围内。值得一提的是,原始剑桥模型中的剪胀方程表达式为^[1]

$$\frac{d\varepsilon_v^p}{d\varepsilon_s^p} = M - \eta \quad (18)$$

由式 (18) 可以看出:原始剑桥模型中初始的等效塑性泊松比也为 M ,与式 (17) 一致。

4.3 基于旋转塑性势面的塑性流动法则

在上述讨论的基础上,可以总结得到完整的塑性流动法则。如图 7 所示,实线 1 表示初始屈服面,实线 2 代表初始塑性势面。在变形一开始可由前节所述方法根据模型参数确定 γ_0 和 γ_d ,对于变形过程中的任一应力点 D ,其等效塑性泊松比 ν^p 可按以下步骤确定:首先将当前应力点坐标代入式 (15),计算出 γ' ,进而得到 γ 确定当前塑性势面旋转角度。其次,将应力点坐标代入式 (11) 求解计算出塑性势面中心 H_p ,以及应力点相应的幅角 θ 。最后,根据式 (12) 计算得到当前应力点对应的等效塑性泊松比 ν^p ,即塑性流动方向。

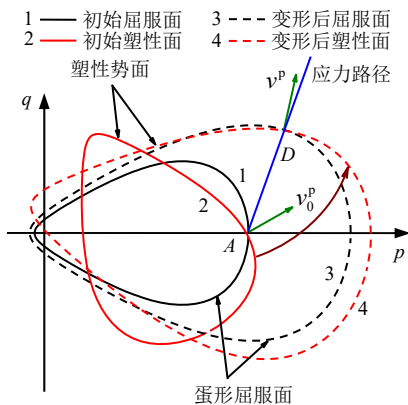


图 7 改进的塑性流动法则示意图

Fig.7 Schematic diagram of improved plastic flow rule

该塑性流动法则,尽管采用了与屈服函数形式

相同的塑性势函数,但严格来讲是属于一种非关联的流动准则。这个模型除了基本的屈服面参数 a 、 b 、 α 之外,仅需 2 个描述塑性势面旋转角 γ 变化规律的参数 k_1 和 k_2 即可实现。

4.4 模型验证

为了验证本文所提出的塑性流动法则的有效性,在本文第 2 节的基础上,补充进行了 2 组常规三轴试验,围压分别为 75 kPa 和 150 kPa。将试验结果所确定的塑性泊松比 ν^p 与理论计算值相比较 (如图 8、9 所示)。计算中模型参数取值分别为: $a = 1.08$, $b = 0.49$, $\alpha = 0.67$, $k_1 = 1.138$, $k_2 = 0.619$ 。

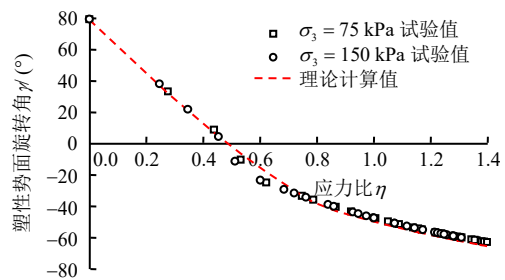


图 8 塑性势面旋转角 γ 的试验值与计算值比较

Fig.8 Comparison between experimental results and calculated values of rotational angle γ

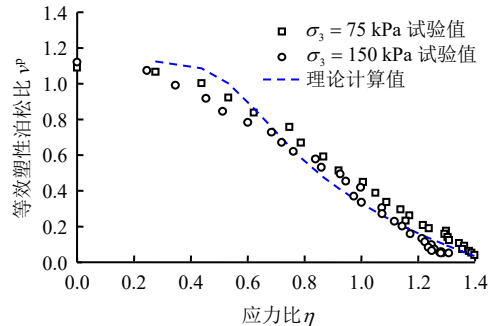


图 9 等效塑性泊松比 ν^p 的试验值与计算值比较

Fig.9 Comparison between experimental results and calculated values of equivalent plastic Poisson's ratio ν^p

从图 8 和图 9 中可以看到塑性势面旋转角 γ 以及等效塑性泊松比 ν^p 的试验值与计算值均比较吻合。虽然 ν^p 的计算值在初始段与试验值有一定偏差,这是由于初始值 ν_0^p 的不同所导致的,因为在计算中人为引入了式 (17) 这一假设,但试验结果对于 75 kPa 以及 150 kPa, ν_0^p 的值分别为 1.13 以及 1.22,从而引起了偏离。但总体的偏差幅度控制可以在 0.1 以内,确保了计算模型的有效性。另一方面,塑性势面旋转角 γ 对初始等效塑性泊松比 ν^p 的差异较不敏感,比如说 75 kPa 的初始塑性流动方向角与计算模型所确定的初始流动方向角分别为

41.5° 和 37.0°，在误差范围内。因此，塑性势面旋转角的计算结果误差较小。

为进一步论证本文所提模型的合理性，从相关文献中选取了 Fujinomori 黏土、上海浦东以及苏州海相黏土等 3 种软土的常规三轴试验结果^[31-32]，对应围压分别为 196、320、640 kPa。模型预测所采用的参数如表 3 所示，屈服面参数 a 取为 1，这样做即忽略了土体的抗拉能力，屈服面顶点就经过坐标原点，与剑桥模型相类似。

表 3 模型预测所用参数
Table 3 Model parameters in predictions

参数	b	α	K_0	G /MPa	k_1	k_2	M
Fujinomori 黏土 ^[31]	0.56	0.68	89.3	14.6	1.45	0.48	1.41
上海海相软黏土 ^[32]	0.60	0.66	90.9	21.2	1.44	0.85	1.24
苏州软土 ^[32]	0.58	0.67	83.3	39.7	1.30	0.82	1.26

图 10 给出了上述 3 组试验中等效塑性泊松比 ν^p 试验值与计算值的比较，结果表明本文模型能够合理描述软土在弹塑性变形中塑性流动基本趋势。

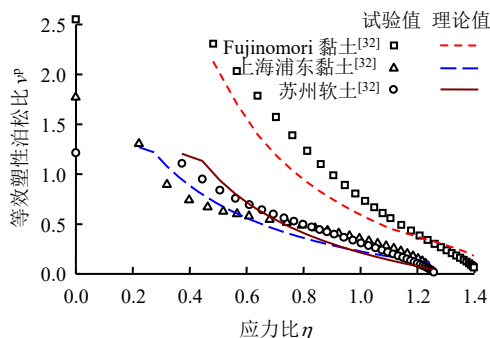


图 10 本文模型对于不同土体适用性的验证
Fig.10 Verification of model's applicability to different types of soils

但仍要指出的是，本文模型是针对应变硬化的土体变形而提出，对于以应变软化变形特征的土体，文中未有详细的讨论，但不难推断，在该种情形下无量纲的塑性势面旋转角参数 γ' 与应力状态参数 ξ 不再是式 (15) 所表示的分段线性关系，具体的表示关系仍有待进一步研究。

5 结 论

本文在常规三轴试验的基础上，采用弹塑性本构理论对软土的塑性变形进行了计算分析，进而针对蛋形屈服函数提出了一种改进的塑性流动法则，该模型的主要特点有：

(1) 塑性势面具有与屈服准则相同的函数形

式，但具有一定倾角 γ 。

(2) 在弹塑性变形过程中，塑性势面倾角 γ 会随塑性流动方向的变化而改变，导致塑性势面的旋转。参数 γ 的初始值及终值不受围压大小的影响，于是可采用归一化参数 γ' 作为描述塑性势面状态的参量。

(3) 通过引入描述土体应力状态的参量 ξ ，建立起 γ' 与 ξ 之间的关联性，从而构建起非关联的塑性流动法则。

(4) 本文所提出的塑性流动法则既保留了与屈服函数相一致的函数形式，又改善了由于采用相适应流动准则所导致的偏差。通过与试验结果的比较，验证本文提出的模型可以较好地反映出塑性变形的趋势以及塑性变形与土体状态的相关性。虽然本文模型是针对蛋形屈服函数所提出的，但整体思路相信对于其他形式的屈服函数也可适用，希望本文的一些成果对于相关领域的研究有一定的裨益。

参 考 文 献

- [1] 龚晓南. 土塑性力学[M]. 杭州: 浙江大学出版社, 1999.
GONG Xiao-nan. Soil plasticity[M]. Hangzhou: Zhejiang University Press, 1999.
- [2] 黄文熙. 土的弹塑性应力-应变模型理论[J]. 岩土力学, 1979, 1(1): 1-20.
HUANG Wen-xi. Theory of elastoplastic stress-strain model for soil[J]. *Rock and Soil Mechanics*, 1979, 1(1): 1-20.
- [3] 郭瑞平, 李广信. 以塑性功函数为硬化参数的土的弹塑性模型[J]. 清华大学学报(自然科学版), 2009, 40(5): 125-127.
GUO Rui-ping, LI Guang-xin. Elasto-plastic model of soil with a function of plastic work as the hardening function[J]. *Journal of Tsinghua University (Science and Technology)*, 2009, 40(5): 125-127.
- [4] 胡伟, 黄义, 刘增荣, 等. 饱和黏土中挤土桩球形孔扩张的弹塑性分析[J]. 工程力学, 2008, 25(8): 180-187.
HU Wei, HUANG Yi, LIU Zeng-rong, et al. Elastic-plastic solution of sphere cavity expansion of soil compaction pile in saturated clay[J]. *Engineering Mechanics*, 2008, 25(8): 180-187.
- [5] 沈恺伦, 王立忠. 天然软黏土屈服面及流动法则试验研究[J]. 土木工程学报, 2009, 42(4): 119-127.
SHEN Kai-lun, WANG Li-zhong. Experimental study on the yield surface and flow rule of natural clays[J]. *China Civil Engineering Journal*, 2009, 42(4): 119-127.
- [6] 刘新荣, 钟祖良, 张永兴, 等. 以塑性功为硬化参数的

- Q₂ 原状黄土弹塑性模拟[J]. 岩土力学, 2009, 30(5): 1215-1220.
- LIU Xin-rong, ZHONG Zu-liang, ZHANG Yong-xing, et al. Elastoplastic modeling of unsaturated intact Q₂ loess with plastic work as hardening parameter[J]. **Rock and Soil Mechanics**, 2009, 30(5): 1215-1220.
- [7] YAN W M, LI X S. A model for natural soil with bonds[J]. **Geotechnique**, 2011, 61(2): 95-106.
- [8] HONG P Y, PEREIRA J M, TANG A M, et al. A two-surface plasticity model for stiff clay[J]. **Acta Geotechnica**, 2016, 61(11): 871-885.
- [9] 朱合华, 黄伯麒, 张琦, 等. 基于广义 Hoek-Brown 准则的弹塑性本构模型及其数值实现[J]. 工程力学, 2016, 33(2): 41-49.
- ZHU He-hua, HUANG Bo-qi, ZHANG Qi, et al. Elastoplastic rock constitutive model based on generalized Hoek-Brown strength criterion and its numerical implementation[J]. **Engineering Mechanics**, 2016, 33(2): 41-49.
- [10] 周维垣, 孙卫军. 岩石的临界状态非关联弹塑性本构模型[J]. 岩石力学与工程学报, 1990, 9(1): 1-10.
- ZHOU Wei-yuan, SUN Wei-jun. The non-associate critical elasto-plastic constitutive model for rock[J]. **Chinese Journal of Rock Mechanics and Engineering**, 1990, 9(1): 1-10.
- [11] 邓楚键, 何国杰, 郑颖人. 基于 M-C 准则的 D-P 系列准则在岩土工程中的应用研究[J]. 岩土工程学报, 2006, 28(6): 735-739.
- DENG Chu-jian, HE Guo-jie, ZHENG Ying-ren. Studies on Drucker-Prager yield criterions based on M-C yield criterion and application in geotechnical engineering[J]. **Chinese Journal of Geotechnical Engineering**, 2006, 28(6): 735-739.
- [12] 王永甫, 王成, 唐晓松. 基于非关联流动法则的圆形隧洞滑移线解答[J]. 应用数学和力学, 2013, 34(12): 1285-1290.
- WANG Yong-fu, WANG Cheng, TANG Xiao-song. Slip line solution for circular tunnels based on the non-associated flow rule[J]. **Applied Mathematics and Mechanics**, 2013, 34(12): 1285-1290.
- [13] GIUSEPPE MORTARA. A constitutive framework for the elastoplastic modelling of geomaterials[J]. **International Journal of Solids and Structures**, 2015, 63: 139-152.
- [14] 姚仰平, 刘林, 罗汀. 砂土的 UH 模型[J]. 岩土工程学报, 2016, 38(12): 2147-2153.
- YAO Yang-ping, LIU Lin, LUO Ting. UH model for sands[J]. **Chinese Journal of Geotechnical Engineering**, 2016, 38(12): 2147-2153.
- [15] 胡嫚, 谢谟文, 王立伟. 基于弹塑性土体本构模型的滑坡运动过程 SPH 模拟[J]. 岩土工程学报, 2016, 38(1): 58-67.
- HU Man, XIE Mo-wen, WANG Li-wei. SPH simulations of post-failure flow of landslides using elastic-plastic soil constitutive model[J]. **Chinese Journal of Geotechnical Engineering**, 2016, 38(1): 58-67.
- [16] 李震, 赵洪波, 刘尚各, 等. 考虑围压效应和塑性演化机制的中密砂力学模型[J]. 岩石力学与工程学报, 2018, 37(11): 2611-2620.
- LI Zhen, ZHAO Hong-bo, LIU Shang-ge, et al. Mechanical model for medium dense sand considering confining pressure effect and plastic evolution[J]. **Chinese Journal of Rock Mechanics and Engineering**, 2018, 37(11): 2611-2620.
- [17] MCDOWELL G, HAU K. A generalised modified Cam clay model for clay and sand incorporating kinematic hardening and bounding surface plasticity[J]. **Granular Matter**, 2004, 6(1): 11-16.
- [18] 李顺群, 张建伟, 夏锦红. 原状土的剑桥模型和修正剑桥模型[J]. 岩土力学, 2015, 36(增刊 2): 215-220.
- LI Shun-qun, ZHANG Jian-wei, XIA Jin-hong. An improvement on Cam-clay model and modified Cam-clay model for intact soil[J]. **Rock and Soil Mechanics**, 2016, 36(Suppl.2): 215-220.
- [19] ZHOU C, LEROUEIL S, FAFARD M J, et al. Constitutive modeling of kinematic hardening behavior of saturated anisotropic soils[J]. **International Journal of Geomechanics**, 2017, 17(3): 04016063.
- [20] LU D C, LI X Q, DU X L. A simple 3D elastoplastic constitutive model for soils based on the characteristic stress[J]. **Computers and Geotechnics**, 2019, 109: 229-247.
- [21] 刘斯宏, 沈超敏, 毛航宇, 等. 堆石料状态相关弹塑性本构模型[J]. 岩土力学, 2019, 40(8): 2891-2898.
- LIU Si-hong, SHEN Chao-min, MAO Hang-yu, et al. State-dependent elastoplastic constitutive model for rockfill materials[J]. **Rock and Soil Mechanics**, 2019, 40(8): 2891-2898.
- [22] KIM M K, LADE P V. Single hardening constitutive model for frictional materials: I. plastic potential function[J]. **Computers and Geotechnics**, 1988, 5(4): 307-324.
- [23] 曾军军, 卢廷浩. 考虑土体结构性的弹塑性软化模型[J]. 岩土力学, 2007, 28(6): 1901-1904.
- ZENG Jun-jun, LU Ting-hao. An elastoplastic softening model of structured soil[J]. **Rock and Soil Mechanics**, 2007, 28(6): 1901-1904.

- [24] 孔亮, COLLINS IAN F. 模拟土体本构特性的热力学方法[J]. 岩土力学, 2008, 29(7): 1732-1740.
KONG Liang, COLLINS IAN F. Thermomechanical approach to modeling constitutive behaviors of geomaterials[J]. **Rock and Soil Mechanics**, 2008, 29(7): 1732-1740.
- [25] 王红, 袁鸿, 夏晓舟, 等. 基于最小耗能原理的塑性应变流动法则[J]. 上海大学学报(自然科学版), 2012, 18(4): 390-395.
WANG Hong, YUAN Hong, XIA Xiao-zhou, et al. Flowing rule of plastic strain based on least energy dissipation principle[J]. **Journal of Shanghai University (Natural Science)**, 2012, 18(4): 390-395.
- [26] 任放, 盛谦, 常燕庭. 岩土类工程材料的蛋形屈服函数[J]. 岩土工程学报, 1993, 15(4): 33-39.
REN Fang, SHENG Qian, CHANG Yan-ting. Egg shaped yield function for geotechnical engineering materials[J]. **Chinese Journal of Geotechnical Engineering**, 1993, 15(4): 33-39.
- [27] 徐日庆, 杨林德, 龚晓南. 土的边界面应力-应变本构关系[J]. 同济大学学报(自然科学版), 1997, 25(1): 29-33.
XU Ri-qing, YANG Lin-de, GONG Xiao-nan. Stress-strain constitutive relationship of boundary surface of soils[J]. **Journal of Tongji University (Natural Science)**, 1997, 25(1): 29-33.
- [28] POOROOSHASB H B, HOLUBEC I, SHERBOURNE A N. Yielding and flow of sand in triaxial compression: part I[J]. **Canadian Geotechnical Journal**, 1966, 3(4): 179-190.
- [29] LADE P V, DUNCAN J M. Stress-path dependent behavior of cohesionless soil[J]. **Journal of Geotechnical Engineering Division, ASCE**, 1976, 102: 51-68.
- [30] YU H S. CASM: a unified state parameter model for clay and sand[J]. **International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics**, 1998, 22(8): 621-653.
- [31] NAKAI T, MATSUOKA H. A generalized elastoplastic constitutive model for clay in three-dimensional stresses[J]. **Soils and Foundations**, 1986, 26(3): 81-98.
- [32] 陈波, 孙德安, 金盼. 海相沉积软黏土的弹塑性本构模型研究[J]. 岩土力学, 2015, 36(3): 730-738.
CHEN Bo, SUN De-an, JIN Pan. An elastoplastic constitutive model for marine sedimentary soft clays[J]. **Rock and Soil Mechanics**, 2015, 36(3): 730-738.
-
- 上接第 1473 页
- [13] 白冰, 张鹏远, 闫瑜龙, 等. 内外边界施加温度荷载的中空圆柱试样热固结试验[J]. 岩土工程学报, 2015, 37(1): 67-74.
BAI Bing, ZHANG Peng-yuan, JIA Ding-yun, et al. Consolidation effects of a saturated red clay subjected to temperature loading with different amplitudes[J]. **Chinese Journal of Geotechnical Engineering**, 2013, 35(11): 1972-1978.
- [14] 张宇宁, 陈宇龙, 李博. 饱和黏土的一维热固结特性试验研究[J]. 东北大学学报(自然科学版), 2016, 37(12): 1794-1799.
ZHANG Yu-ning, CHEN Yu-long, LI Bo. Experimental study of one-dimensional thermal consolidation of saturated clays[J]. **Journal of Northeastern University (Natural Science)**, 2016, 37(12): 1794-1799.
- [15] 吴瑞潜. 饱和土一维热固结解析理论研究[D]. 杭州: 浙江大学, 2008.
WU Rui-qian. Analytical study on one-dimensional thermal consolidation theory of saturated soil[D]. Hangzhou: Zhejiang University, 2008.
- [16] 蔡袁强, 梁旭, 吴世明. 变荷载下半透水边界成层地基的一维固结[J]. 应用数学和力学, 2004, 36(8): 855-862.
CAI Yuan-qiang, LIANG Xu, WU Shi-ming. One-dimensional consolidation of layered soils with impeded boundaries under time dependent loadings[J]. **Applied Mathematics and Mechanics**, 2004, 36(8): 855-862.
- [17] INCROPERA F P, DEWITT D P, BERGMAN T L, et al. Fundamentals of heat and mass transfer[M]. New York: John Wiley and Sons Inc., 2007.
- [18] DUBNER H, ABATE J. Numerical inversion of Laplace transform by relating them to the finite Fourier cosine transform[J]. **Journal of the ACM**, 1968, 15(1): 115-123.
- [19] STEHFEST H. Algorithm 368: Numerical inversion of Laplace transforms [J]. **Communications of the ACM**, 1970, 13(1): 47-49.
- [20] CRUMP K S. Numerical inversion of Laplace transforms using a Fourier series approximation[J]. **Journal of the ACM**, 1976, 23(1): 89-96.
- [21] 何光渝, 王卫红. 精确的拉普拉斯数值反演方法及其应用[J]. 石油学报, 1995, 16(1): 96-103.
HE Guang-yu, WANG Wei-hong. Accurate numerical Laplace inversion method and its application[J]. **Acta Petrolei Sinica**, 1995, 16(1): 96-103.